問題1

(1)　$\tan\{T(x)\}=x,\ \tan\{T(y)\}=y$ であることから

$$\tan\{T(x)+T(y)\}=\frac{\tan\{T(x)\}+\tan\{T(y)\}}{1-\tan\{T(x)\}\cdot\tan\{T(y)\}}=\frac{x+y}{1-xy}$$

（答）$\dfrac{x+y}{1-xy}$

(2)
$$\tan\left\{4\,T\left(\frac{1}{5}\right)-T\left(\frac{1}{239}\right)\right\}=\frac{\tan\left\{4\,T\left(\frac{1}{5}\right)\right\}-\tan\left\{T\left(\frac{1}{239}\right)\right\}}{1+\tan\left\{4\,T\left(\frac{1}{5}\right)\right\}\cdot\tan\left\{T\left(\frac{1}{239}\right)\right\}}$$

ここで

$$\tan\left\{2\,T\left(\frac{1}{5}\right)\right\}=\frac{2\tan\left\{T\left(\frac{1}{5}\right)\right\}}{1-\left[\tan\left\{T\left(\frac{1}{5}\right)\right\}\right]^2}=\frac{5}{12}$$

$$\tan\left\{4\,T\left(\frac{1}{5}\right)\right\}=\frac{2\tan\left\{2\,T\left(\frac{1}{5}\right)\right\}}{1-\left[\tan\left\{2\,T\left(\frac{1}{5}\right)\right\}\right]^2}=\frac{120}{119}$$

より

$$\tan\left\{4\,T\left(\frac{1}{5}\right)-T\left(\frac{1}{239}\right)\right\}$$
$$=\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}=\frac{1+\frac{1}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}=\frac{1+\frac{239-119}{119\cdot 239}}{1+\frac{120}{119\cdot 239}}=1$$

これと

$$-\frac{\pi}{2}<4\,T\left(\frac{1}{5}\right)-T\left(\frac{1}{239}\right)<\frac{\pi}{2}$$

より

$$4\,T\left(\frac{1}{5}\right)-T\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。

問題2

$$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ -4),$$
$$\overrightarrow{AC}=(t-1,\ -2,\ -8)$$

より

$$|\overrightarrow{AB}|^2=1^2+2^2+(-4)^2=21$$
$$|\overrightarrow{AC}|^2=(t-1)^2+(-2)^2+(-8)^2=t^2-2t+69$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot(t-1)+2\cdot(-2)+(-4)\cdot(-8)=t+27$$

△ABCの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\,|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{21(t^2-2t+69)-(t+27)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{20t^2-96t+720}$$
$$=\sqrt{5t^2-24t+180}$$
$$=\sqrt{5\left(t-\frac{12}{5}\right)^2+\frac{756}{5}}$$

よって，$t=\dfrac{12}{5}$ のとき，△ABCの面積は最小値

$$\sqrt{\frac{756}{5}}=\frac{6\sqrt{105}}{5}$$

をとる。

（答）$t=\dfrac{12}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{6\sqrt{105}}{5}$

問題3

(1)　(答)　$\dfrac{\cos\theta}{m}x+\dfrac{\sin\theta}{n}y=1$

(2)　(1)の結果より，ℓ の法線ベクトルとして下図の向きに

$$\vec{u}=(-n\cos\theta,\ -m\sin\theta)$$

をとる。ここで，Fの座標は$(\sqrt{m^2-n^2},\ 0)$であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{MF}}=(\sqrt{m^2-n^2}-m\cos\theta,\ -n\sin\theta)$$

下図の点G′の座標を$(t,\ 0)$とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{MG'}}=(t-m\cos\theta,\ -n\sin\theta)\ \cdots①$$

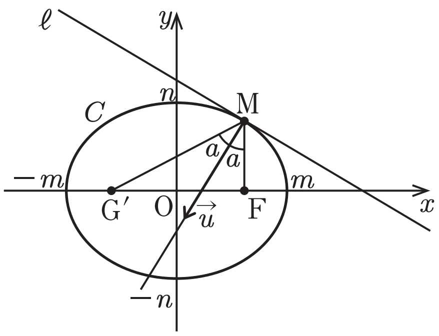
である。これより，ベクトルの内積を用いて

$$\cos a=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MF}}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{\mathrm{MF}}|\,|\vec{u}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MG'}}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{\mathrm{MG'}}|\,|\vec{u}|}$$

と表される。ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{MF}}\cdot\vec{u}=n(m-\sqrt{m^2-n^2}\cos\theta)\neq0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MG'}}\cdot\vec{u}=n(m-t\cos\theta)\neq0$$



また

$$|\overrightarrow{\mathrm{MF}}|^2=(\sqrt{m^2-n^2}-m\cos\theta)^2+n^2\sin^2\theta$$
$$=m^2-2m\sqrt{m^2-n^2}\cos\theta+(m^2-n^2)\cos^2\theta$$
$$=(m-\sqrt{m^2-n^2}\cos\theta)^2$$

これより

$$|\overrightarrow{\mathrm{MG'}}|^2=\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{MG'}}\cdot\vec{u}}{\overrightarrow{\mathrm{MF}}\cdot\vec{u}}\right)^2|\overrightarrow{\mathrm{MF}}|^2$$
$$=(m-t\cos\theta)^2$$
$$=m^2-2mt\cos\theta+t^2-t^2\sin^2\theta\cdots②$$

一方，①より

$$|\overrightarrow{\mathrm{MG'}}|^2=(t-m\cos\theta)^2+n^2\sin^2\theta$$
$$=t^2-2mt\cos\theta+m^2(1-\sin^2\theta)+n^2\sin^2\theta\cdots③$$

②，③より

$$-t^2\sin^2\theta=-m^2\sin^2\theta+n^2\sin^2\theta$$

題意より $\sin\theta\neq0$ なので

$$t^2=m^2-n^2$$

$$t=\pm\sqrt{m^2-n^2}$$

G′はF以外の点なので，$t=-\sqrt{m^2-n^2}$

よって，G′の座標は$(-\sqrt{m^2-n^2},\ 0)$であり，CのFでない焦点Gと一致する。

以上より，球はもう一方の焦点Gを通る。

問題4

与えられた等式の両辺を２乗すると

$$4|z+4i|^2=9|z-5-6i|^2\ \cdots①$$

ここで，zの共役な複素数を$\overline{z}$とすると

$$4|z+4i|^2=4(z+4i)\overline{(z+4i)}$$
$$=4(z+4i)(\overline{z}-4i)$$
$$=4(z\overline{z}-4iz+4i\overline{z}-16i^2)$$
$$=4|z|^2-16iz+16i\overline{z}+64$$

また

$$9|z-5-6i|^2$$
$$=9(z-5-6i)\overline{(z-5-6i)}$$
$$=9(z-5-6i)(\overline{z}-5+6i)$$
$$=9\{z\overline{z}+(-5+6i)z+(-5-6i)\overline{z}+(25-36i^2)\}$$
$$=9|z|^2+(-45+54i)z+(-45-54i)\overline{z}+549$$

これより，①は

$$5|z|^2+(-45+70i)z+(-45-70i)\overline{z}+485=0$$
$$|z|^2+(-9+14i)z+(-9-14i)\overline{z}+97=0$$
$$z\overline{z}-\overline{(9+14i)}z-(9+14i)\overline{z}+277=180$$
$$\{z-(9+14i)\}\{\overline{z}-\overline{(9+14i)}\}=180$$
$$|z-(9+14i)|^2=(6\sqrt{5})^2$$
$$|z-(9+14i)|=6\sqrt{5}$$

よって，zの表す図形は，点$9+14i$を中心とする半径$6\sqrt{5}$の円である。

(答)　点$9+14i$を中心とする半径$6\sqrt{5}$の円

問題5

n 枚のカードに書かれている数の和は

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

であり，これが $S+T$ に等しい。これより，$\frac{n(n+1)}{2}$ が偶数であることが $S=T$ であるための必要条件である。

$n=4m$ のとき，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m$ において

$$(4k-3)+4k=(4k-2)+(4k-1)$$

であることから，たとえば4で割り切れる数と4で割ったときに1余る数のカードをAの箱，4で割ったときに2または3余る数のカードをBの箱に入れれば，$S=T$ が成り立つ。

$n=4m+1$ のとき

$$\begin{aligned}&\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{(4m+1)\{(4m+1)+1\}}{2}\\&=(4m+1)(2m+1)\\&=2(4m^2+3m)+1\end{aligned}$$

より，$\frac{n(n+1)}{2}$ の値が奇数になることから，$S=T$ を満たすカードの入れ方は存在しない。

$n=4m+2$ のとき

$$\begin{aligned}&\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{(4m+2)\{(4m+2)+1\}}{2}\\&=(2m+1)(4m+3)\\&=2(4m^2+5m+1)+1\end{aligned}$$

より，$\frac{n(n+1)}{2}$ の値が奇数になることから，$S=T$ を満たすカードの入れ方は存在しない。

$n=4m+3$ のとき，$1+2=3$ であることと，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m$ において

$$(4k+1)+(4k+2)=4k+(4k+3)$$

であることから，たとえば4で割ったときに1または2余る数のカードをAの箱，4で割り切れる数と4で割ったときに3余る数のカードをBの箱に入れれば，$S=T$ が成り立つ。

（答）$n=4m,\ 4m+3$ のとき存在する
$n=4m+1,\ 4m+2$ のとき存在しない

問題6

(1)

$$\begin{aligned}\frac{x}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{x+1}}}&=\frac{x}{a+\frac{1}{\frac{b(x+1)+1}{x+1}}}\\&=\frac{x}{a+\frac{x+1}{b(x+1)+1}}\\&=\frac{x\{b(x+1)+1\}}{a\{b(x+1)+1\}+x+1}\\&=\frac{bx^2+(b+1)x}{(ab+1)x+ab+a+1}\cdots①\end{aligned}$$

これより，x の値によらず①が一定の値をとるならば，①の分子の x^2 の係数が0，すなわち $b=0$ を満たす必要がある。このとき①は

$$\frac{x}{x+a+1}\cdots②$$

となる。これより，$a+1=0$ すなわち $a=-1$ であればよい。このとき②は $\frac{x}{x}$ すなわち，x の値によらずつねに1となる。

（答）$a=-1,\ b=0,\ (*)$ の値1

(2)　$(*)$ が x の2次式になるならば，①の分母部分が定数，すなわち $ab=-1\ (\neq 0)$ を満たす必要がある。このとき

$$a=-\frac{1}{b}\ (b\neq 0)$$

であることから，①は

$$\begin{aligned}&-b^2x^2-(b^2+b)x\\&=-b^2\left\{x^2+\left(1+\frac{1}{b}\right)x\right\}\\&=-b^2\left\{x+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{b}\right)\right\}^2+\frac{(b+1)^2}{4}\end{aligned}$$

となる。よって，$b\neq 0$ より $-b^2<0$ だから，$x=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{b}\right)$ のとき最大値 $\frac{(b+1)^2}{4}$ をとる。

（答）$ab=-1$，最大値 $\frac{(b+1)^2}{4}$

問題７

(1) $f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+x$ より

$$f'(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$$

$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における増減は下のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	

ここで

$f(0)=\sqrt{3}$,

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}$,

$f(\pi)=-\sqrt{3}+\pi$,

$f(2\pi)=\sqrt{3}+2\pi$

以上より，$0\leqq x\leqq 2\pi$ において $f(x)$ は

$x=2\pi$ のとき最大値 $\sqrt{3}+2\pi$

$x=\pi$ のとき最小値 $-\sqrt{3}+\pi\ (>0)$

をとる。

(答) 最大値 $\sqrt{3}+2\pi$，最小値 $-\sqrt{3}+\pi$

(2) (1)の結果より，$0\leqq x\leqq 2\pi$ において $f(x)$ はつねに正の値をとる。これより求める回転体の体積は

$$\pi\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2dx$$
$$=\pi\int_0^{2\pi}\left\{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+x\right\}^2dx$$
$$=\pi\int_0^{2\pi}\left\{4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+x^2\right\}dx$$

ここで

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{1-\cos\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)\right]_0^{2\pi}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\pi$$
$$=\pi$$

$$\int_0^{2\pi}x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$$
$$=\left[-x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$$
$$=-2\pi\times\frac{1}{2}+\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{2\pi}$$
$$=-\pi$$

$$\int_0^{2\pi}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\pi^3$$

よって，求める回転体の体積は

$$\pi\left\{4\pi+4\cdot(-\pi)+\frac{8}{3}\pi^3\right\}$$
$$=\frac{8}{3}\pi^4$$

(答) $\dfrac{8}{3}\pi^4$