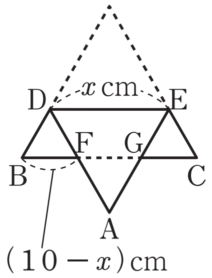
問題1

(1)　右の図のように，線分AD，AEと辺BCとの交点をそれぞれF，Gとおく。



$5<x<10$ における S は，台形DFGEの面積と一致する。

△DBFと△EGCは正三角形であり，1辺の長さは

$10-x$ (cm)

また，△AGFも正三角形であり，その1辺の長さは

$10-2(10-x)=2x-10$ (cm)

したがって

$$S=\frac{1}{2}x^2\sin 60^\circ-\frac{1}{2}(2x-10)^2\sin 60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(-3x^2+40x-100)$$

(答)　$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(-3x^2+40x-100)$

(2)　(1)の結果より

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-3\left(x-\frac{20}{3}\right)^2+\frac{100}{3}\right\}$$

$5<\dfrac{20}{3}<10$ であるから，$x=\dfrac{20}{3}$ のとき

S は最大値 $\dfrac{25\sqrt{3}}{3}$ をとる。

(答)　$x=\dfrac{20}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{25\sqrt{3}}{3}$

問題2

Pさんの計算より

$a+b\div c=19$

$ac+b=19c$　…①

Qさんの計算より

$(a+b)\div c=6$

$a+b=6c$　…②

①－②より

$ac-a=13c$

$(a-13)(c-1)=13$

よって，これを満たす正の整数 a，c の組は

$(a,\ c)=(26,\ 2),\ (14,\ 14)$

これらを②に代入して b の値を求める。

(i)　$(a,\ c)=(26,\ 2)$ のとき

$b=6c-a=6\cdot 2-26=-14$

これは $b>0$ に反する。

(ii)　$(a,\ c)=(14,\ 14)$ のとき

$b=6c-a=6\cdot 14-14=70$

これは条件を満たす。

(i)，(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(14,\ 70,\ 14)$ である。

(答)　$(a,\ b,\ c)=(14,\ 70,\ 14)$

問題3

(1)　三角関数の合成より

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

である。また，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi\quad\cdots①$$

よって

$$-\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$

であるから，求める x の値の範囲は

$$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$$

(答)　$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$

(2)　$\sin\theta+\cos\theta=x$ の両辺を2乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=x^2$$

$$1+\sin 2\theta=x^2$$

したがって，$\sin 2\theta=x^2-1$ である。

(答)　$\sin 2\theta=x^2-1$

(3)　(2)の結果より

$$2\sin 2\theta+2\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)-1=0$$

を x を用いて表すと

$$2x^2+2\sqrt{2}x-3=0$$

$$x=-\frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(1)の結果より，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

①より

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$$

$$\theta=\frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$$

(答)　$\theta=\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi$

問題4

$n \geqq 2$のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$
$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$$
$$= 2 + 2 \cdot \frac{1-3^{n-1}}{1-3}$$
$$= 3^{n-1} + 1$$

これは$n=1$のときも成り立つ。

(答) $a_n = 3^{n-1} + 1$

問題5

(答) 6回

問題6

(1) このデータの平均値は

$$\frac{8+10+x+17+18+20}{6} = \frac{x+73}{6}$$

また，データの個数が偶数であるから，メジアン(中央値)は

$$\frac{x+17}{2}$$

これらの値が等しいので

$$\frac{x+73}{6} = \frac{x+17}{2}$$
$$x+73 = 3(x+17)$$
$$x = 11$$

(答) $x = 11$

(2) (1)の結果より，平均値は14点である。したがって，求める分散は

$$\frac{(-6)^2+(-4)^2+(-3)^2+3^2+4^2+6^2}{6}$$
$$= \frac{36+16+9+9+16+36}{6}$$
$$= \frac{122}{6} = \frac{61}{3}$$

(答) $\frac{61}{3}$

問題7

(1) $f(x) = x^3 - 2$より

$$f'(x) = 3x^2$$

であるから，点$(a,\ f(a))$における接線の傾きは

$$f'(a) = 3a^2$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y = 3a^2(x-a) + a^3 - 2$$
$$= 3a^2x - 2a^3 - 2 \quad \cdots ①$$

(答) $y = 3a^2x - 2a^3 - 2$

(2) (1)の結果に $x=1$，$y=-2$をそれぞれ代入して

$$-2 = 3a^2 - 2a^3 - 2$$

これを整理すると

$$a^2(2a-3) = 0$$
$$a = 0,\ \frac{3}{2}$$

$a=0$のとき，①より

$$y = -2$$

$a = \frac{3}{2}$のとき，①より

$$y = \frac{27}{4}x - \frac{35}{4}$$

以上より，接線は2本あり，それらの方程式は

$$y = -2$$
$$y = \frac{27}{4}x - \frac{35}{4}$$

である。

(答) $y=-2$，$y = \frac{27}{4}x - \frac{35}{4}$